CHAPITRE I
CHAMP ET POTENTIEL ELECTRIQUE DANS LE VIDE

Plusieurs substances frottées attirent des corps légers. On dit que ces substances sont chargées électriquement. La plus petite quantité de charge est portée par les électrons.
Cette charge vaut e=1.6 10^{-19} Coulomb (C) et elle est négative. Dans certaines substances les électrons sont libres de se déplacer : ce sont des conducteurs. C'est l'ensemble de tous les métaux comme l'aluminium, l'or, le cuivre et les alliages comme l'acier et la fonte. Les substances dans lesquelles les électrons ne se déplacent pas facilement sont des isolants, c'est l'exemple du bois, du papier et les matières plastiques en général.
Un corps est chargé négativement s'il gagne des électrons et un corps est chargé positivement s'il perd des électrons.

L'électrostatique étudie les interactions entre les charges électriques immobiles. Nous nous contentons d'étudier les lois de l'électrostatique dans le vide.

1. LOI DE COULOMB

▲Si nous mettons en présence deux charges électriques dans le vide, elles se repoussent lorsqu'elles sont de même signe et s'attirent dans le cas contraire. La force qui s'exerce entre deux charges électriques q_1 et q_2 de dimensions suffisamment petites par rapport à la distance qui les sépare est :

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}}$$

A q_1 $\vec{u}$ ---------- B q_2 $\vec{F}$

$\vec{r} = \overrightarrow{AB}$

C'est donc une force :

- proportionnelle aux charges q_1 et q_2;
- inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare $r = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$;

- portée par la droite qui joint les deux charges, de vecteur unitaire $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$;
- attractive, si les deux charges sont de signes contraires, et répulsive si elles sont de même signe.

ε_0 est un coefficient caractéristique du vide qui s'appelle **permittivité** du vide et sa valeur dans le système M.K.S.A. (mètre, kilogramme, second, Ampère) est donnée par:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\ 10^9 \text{ unité M.K.S.A. (SI)}$$

Tous les milieux sont caractérisés par une permittivité électrique. Pour l'air $\varepsilon_{air} \approx \varepsilon_0$.

2. CHAMP ELECTROSTATIQUE

Considérons une charge électrique q placée au point A et plaçons une autre charge électrique test Q en un point B quelconque. Cette charge Q est soumise à une force d'origine électrique proportionnelle à Q. On dit qu'elle est soumise à un champ électrique.

▲Le champ électrique en un point est un vecteur $\vec{E}$ identique à la force qui s'exerce sur l'unité de charge électrique placée en ce point. Il résulte de cette définition que la force, $\vec{F}$ qui s'exerce sur une charge Q placée en un point B est donné par la relation:

$$\boxed{\vec{F} = Q\,\vec{E}}$$

$\vec{E}$ représente le champ électrique créé par la charge q au point B :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}} \quad \text{avec} \quad \vec{u} = \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{et} \quad \vec{r} = \vec{AB}$$

Pour une charge positive +q, le vecteur champ électrique $\vec{E}$ s'éloigne de la charge q. Pour une charge négative -q, le vecteur $\vec{E}$ est dirigé vers la charge.

Le champ électrique s'exprime en volts par mètre (V/m).

2.1. Cas d'une distribution discrète de charges

Soient $q_1, q_2, q_3, \ldots$ un ensemble de charges ponctuelles séparées les unes des autres.

▲La force électrique résultante exercée sur une charge électrique donnée Q est la somme vectorielle des forces exercées sur elle par chacune des autres charge.

$$\vec{F}_{q_i \to Q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i\, Q}{r_i^2}\left(\frac{\vec{r}_i}{r_i}\right)$$

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{q_i \to Q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i^2}\left(\frac{\vec{r}_i}{r_i}\right)$$

soit
$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i}$$

or au point M : $\vec{F}(M) = Q\,\vec{E}(M)$

d'où
$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i}$$
avec
$$\boxed{\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i}$$

▲Le vecteur champ électrique en un point M de l'espace est donc la somme vectorielle des champs $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3, \ldots \vec{E}_n$ créés par les charges électriques $q_1, q_2, q_3, \ldots q_n$ au point M.

2.2. Cas de distributions continues

2.2.1. Distribution volumique de charges

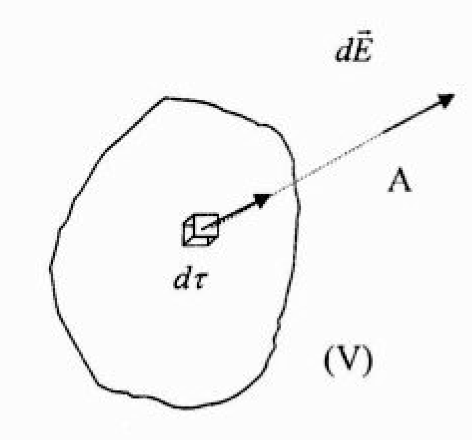
Soit un très grand nombre de charges dans un volume V. On peut considérer que la distribution de charges est continue.

Soit $d\tau$ un élément de volume et dq sa charge, la densité volumique de charge est définie par :

$$\rho = \frac{dq}{d\tau}$$

ρ s'exprime en C/m^3.

Un volume élémentaire $d\tau$ porte donc la charge $dq = \rho\, d\tau$ qui crée au point A le champ :



$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho\, d\tau}{r^2} \vec{u}$$

▲Le champ total crée par la distribution volumique au point A est :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{(V)} \frac{\rho\, d\tau}{r^2} \vec{u}}$$

▲La force totale agissant sur une charge Q placée en A est :

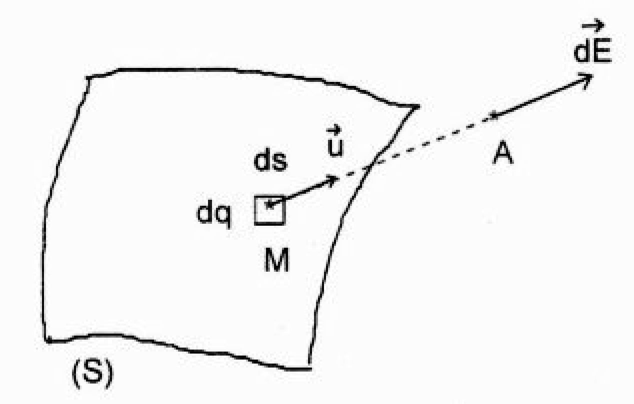
$$\vec{F} = Q\,\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{(V)} \frac{\rho\, d\tau}{r^2}\,\vec{u}$$

2.2.2. Distribution superficielle de charges

Dans ce cas on définit une densité superficielle de charges en M par :

$$\sigma = \frac{dq}{ds},$$ σ s'exprime en C/m^2.

Le champ crée par la charge $dq = \sigma\, ds$ au point est:



$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\,\vec{u} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\, ds}{r^2}\,\vec{u}$$

▲Le champ total crée par la distribution superficielle au point A est :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{(S)} \frac{\sigma\, ds}{r^2}\,\vec{u}$$

▲La force totale agissant sur une charge Q placée en A est :

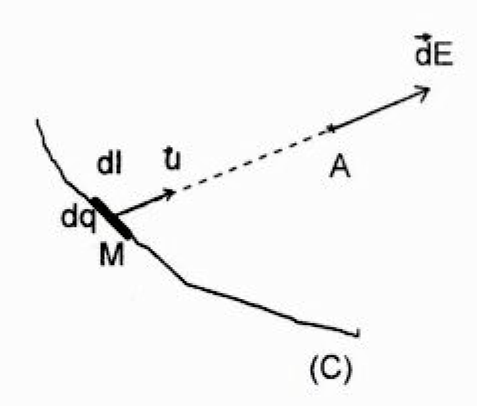
$$\vec{F} = Q\,\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{(S)} \frac{\sigma\, ds}{r^2}\,\vec{u}$$

2.2.3. Distribution linéique de charges

La densité linéique de charges en M est donnée par :

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

λ s'exprime en C/m.



▲Le champ crée par la charge élémentaire $dq = \lambda\, dl$ au point A est:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{u} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dl}{r^2}\vec{u}$$

▲Le champ total crée par la distribution linéique au point A est :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(C)}\frac{\lambda\, dl}{r^2}\vec{u}$$

▲La force totale agissant sur une charge Q placée en A est :

$$\vec{F} = Q\,\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(C)}\frac{\lambda\, dl}{r^2}\vec{u}$$

3. LE POTENTIEL ELECTROSTATIQUE

3.1. Définition

▲Le champ électrique dérive d'un potentiel V défini par la relation :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V \qquad \text{avec} \qquad \vec{E} = \begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

Le potentiel V est donc un scalaire (fonction de point) donné par l'expression :

$$V = -\int \vec{E}.d\vec{l} = -\int (E_x dx + E_y dy + E_z dz)$$

Le signe "-" signifie que le champ électrique est dirigé vers les potentiels décroissants.

3.2. Cas d'une charge ponctuelle

Soit une charge ponctuelle q placée en A, le potentiel au point M est donné par :

$$V = -\int \vec{E}.d\vec{l} \qquad \text{avec} \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}$$

En coordonnées sphériques $d\vec{l}$ s'écrit : $d\vec{l} = dr\,\vec{u} + rd\theta\,\vec{v} + r\sin\theta\,\vec{w}$
d'où

$$V = -\int \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + c^{te}$$

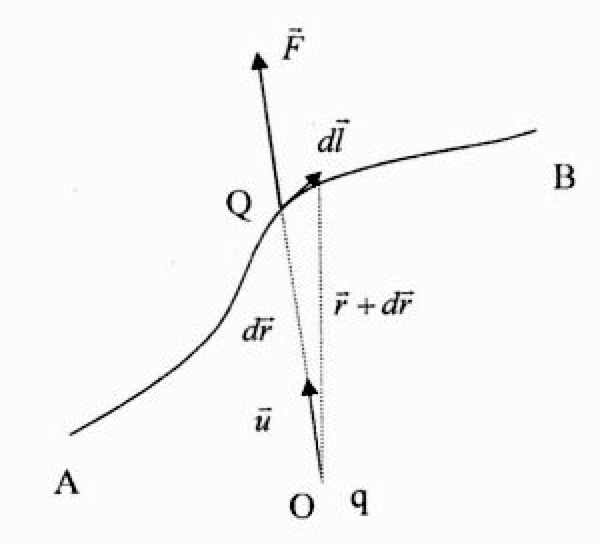
Si on prend un potentiel de référence tel que V soit nul à l'infini, le potentiel est donné par :

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}}$$

Dans le système SI, l'unit é du potentiel est le volt (V).

3.3. Travail de la force électrostatique

Examinons le cas où une charge Q est déplacée entre deux points A et B en suivant la courbe (C). Pour un déplacement élémentaire $d\vec{l}$, le travail de la force électrostatique exercée par la charge q fixe en O est :



$$dW = \vec{F}d\vec{l}$$

or $\vec{F} = Q\vec{E}$

avec $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$ et $d\vec{l} = d\vec{r}$

d'où $W_A^B = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\int_A^B \frac{\vec{r}}{r^3}d\vec{r}$

Comme $\vec{r}^2 = r^2 \Rightarrow 2\vec{r}d\vec{r} = 2rdr$

$\vec{r}^2 = \vec{AB}^2 = AB^2$

On a $W_A^B = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\int_A^B \frac{dr}{r^2} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B}$

soit $$\boxed{W_A^B = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)}$$

C'est de la forme :

$$\boxed{W_A^B = Q(V_A - V_B)}$$

C'est le travail de la force électrostatique, lors du déplacement d'une charge ponctuelle Q d'un point A où le potentiel est V_A, en point B où le potentiel est V_B. Ce travail ne dépend pas donc du chemin suivi; il ne dépend que de la position initiale et de la position finale.

3.4. Potentiel créé par des systèmes de charges

3.4.1. Ensemble de charges ponctuelles

Considérons n charges ponctuelles $q_1, q_2, q_3, \ldots q_n$ créant chacune au point M les champs $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3, \ldots \vec{E}_n$ et les potentiels $V_1, V_2, V_3, \ldots V_n$.
Pour le champ global au point M, nous avons :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \ldots + \vec{E}_n$$

or

$$\begin{aligned} dV &= -\vec{E}.d\vec{l} \\ &= -(\vec{E}_1.d\vec{l} + \vec{E}_2.d\vec{l} + \vec{E}_3.d\vec{l} + \ldots + \vec{E}_n.d\vec{l}) \\ &= dV_1 + dV_2 + dV_3 + \cdots + dV_n \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{V = \sum_1^n V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_1^n \frac{q_i}{r_i}}$$

3.4.2. Distribution continue de charges

Dans le cas d'une distribution continue de charge, le potentiel est donné par :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{(V)} \frac{dq}{r}$$

▲Cas d'une distribution volumique :

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{(V)} \frac{\rho}{r} d\tau}$$

ρ est la densité superficielle de charges de l'élément de volume dv, au point M.

▲Cas d'une distribution superficielle :

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{(S)} \frac{\sigma}{r} ds}$$

σ est la densité linéique de charges de l'élément ds, au point M.

▲Cas d'une distribution linéique :

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{(C)} \frac{\lambda}{r} dl}$$

λ est la densité de charges de l'élément dl, au point M.

3.5. Ligne de champ et surfaces équipotentielles

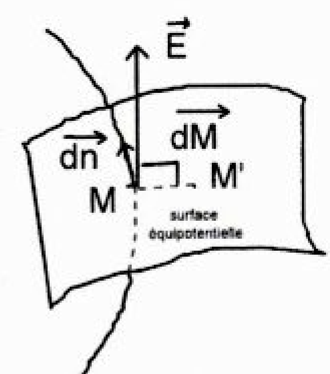
▲Une surface équipotentielle (surface de niveau en général) est une surface sur laquelle le potentiel est le même en tout point. C'est donc l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace qui vérifient : $V(x,y,z) = C^{te}$.
La circulation du champ électrostatique entre deux point situés sur une surface équipotentielle est tel que:

$$dC = \vec{E}.d\vec{M} = -dV = 0 \quad (V = C^{te})$$

L'égalité $\vec{E}.d\vec{M} = 0$ signifie que le vecteur champ électrique est perpendiculaire en tout point à la surface équipotentielle.

▲Les lignes de champ sont l'ensemble des courbes sur lesquelles le champ électrique est tangent en tout point.

Les lignes de champ sont normales aux surfaces équipotentielles.

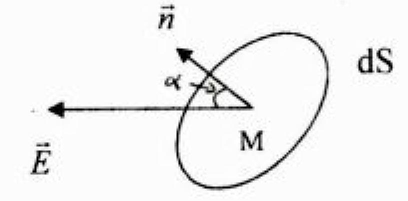


4. FLUX DU CHAMP ELECTROSTATIQUE - THEOREME DE GAUSS

4.1. Définition du flux

Considérons une surface élémentaire, d'aire ds autour d'un point M où le champ électrostatique est $\vec{E}$.
On appelle **flux du vecteur** $\vec{E}$ à travers ds la quantité **algébrique** :

$$d\Phi = \vec{E}.\vec{ds} \quad \text{(produit scalaire)}$$
$$= \vec{E}.\vec{n}\, ds$$
$$= E\, ds \cos\alpha$$



où α est l'angle que fait le champ $\vec{E}$ avec la normale orientée $\vec{n}$ à ds.

▲Le flux à travers une surface finie est la somme algébrique des flux à travers les éléments de cette surface :

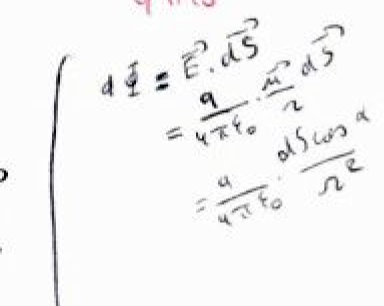
$$\Phi = \int d\Phi = \iint_S \vec{E}.\vec{ds}$$

Le flux du champ électrostatique sera exprimé en volt × mètre en système MKSA.

4.2. Flux produit par une charge ponctuelle

Considérons une charge ponctuelle q placée au point P, cette charge crée en tout point M de l'espace un champ électrostatique $\vec{E}$. Le flux de $\vec{E}$ à travers l'élément de surface dS est donné par la relation :

$$d\Phi = \vec{E}.\vec{ds} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}.\vec{ds}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ds\cos\alpha}{r^2} \qquad \text{avec} \quad \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}}{r^2}$$



Comme le montre la figure $\frac{ds\cos\alpha}{r^2}$ représente l'angle solide $d\Omega$ sous lequel ds est vu à partir du point P. Il vient :

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

Pour une surface finie s :

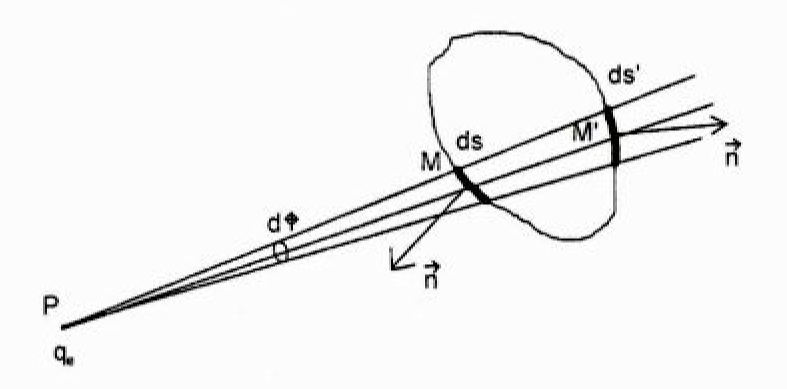
$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega$$

4.3. Théorème de Gauss

Considérons une surface fermée quelconque S et des charges placées dans l'espace. Dans ce cas de surface, on convient d'orienter les normales vers l'extérieur : on dit pour cette raison que Φ représente le flux sortant de S.

1° Cas d'une charge ponctuelle **extérieure** q_e :

Toute demi-droite issue de P coupe la surface fermée un nombre pair de fois ; les flux sont alternativement sortant et rentrant et égaux en valeur absolue le long d'un cône.
Donc le flux total est nul (les flèches, sur la figure, représentent l'orientation des normales).



2° Cas d'une charge ponctuelle **intérieure** q_i :

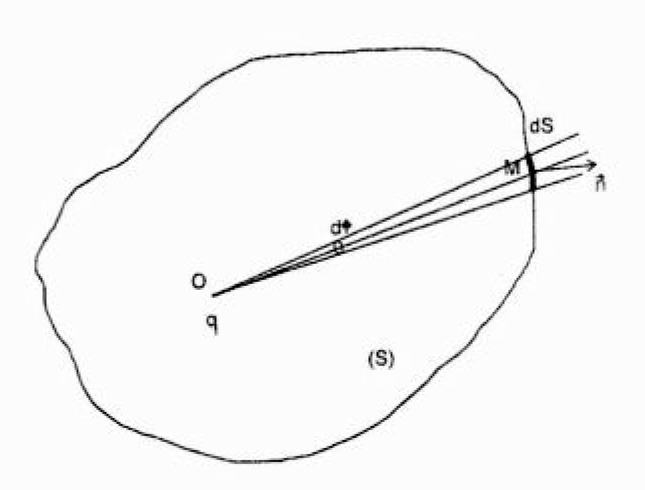
Toute demi-droite issue de P coupe la surface fermée un nombre impair de fois ; la contribution d'un cône d'angle solide $d\Omega$ est :

$$d\Phi = \frac{q\, d\Omega}{4\pi\varepsilon_0}$$

Le flux total sortant de la surface fermée est

$$\Phi = \frac{q_i}{\varepsilon_0} \quad \text{puisque} \quad \int d\Omega = 4\pi$$

d'où l'énoncé du théorème de Gauss :



▲Le flux du champ électrique sortant d'une surface fermée est indépendant des charges extérieures à la surface et vaut :

$$\Phi = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} = \iint_{(S)} \vec{E}\, \vec{ds}$$

q_i sont les charges électriques intérieures à la surface fermée.

Remarques :

1) Considérons le cas d'une charge ponctuelle q_s située sur la surface. Il est facile de voir que $\Omega = 2\pi$, car $d\Omega$ est calculé d'un seul côté du plan tangent. Dans le cas général le théorème de gauss s'écrit :

$$\Phi = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} + \frac{\sum q_s}{2\varepsilon_0}$$

q_i : charges électriques intérieures à la surface fermée.
q_s : charges électriques situées sur à la surface fermée.

2) Si les charges appartiennent à une distribution continue de densité volumique $\rho(M)$, la somme des charges intérieures à la surface fermée (S) est

$$\sum q_i = \iiint_V \rho \, d\tau$$

la somme étant faite sur tous les éléments de volume intérieurs à (S).

3) Si le flux sortant de (S) est nul, cela signifie que la somme algébrique des charges intérieures est nulle, mais pas nécessairement qu'il n'y a pas de charges dans (S)

4) Le théorème de Gauss n'est utilisable que si, grâce à la symétrie du système, on peut trouver une surface simple (S) telle que le champ est :

- soit normal à (S)et a un module constant ($\iint_{(S)} \vec{E}\,\vec{ds} = \iint_{(S)} E\,ds = E\,S$),

- soit tangent à (S) ($\iint_{(S)} \vec{E}\,\vec{ds} = 0$).

5. EQUATIONS FONDAMENTALES DU CHAMP ELECTROSTATIQUE

▲Le théorème de la divergence (Ostrogradsky) dit que le flux d'un champ de vecteurs $\vec{A}$ à travers une surface fermée (S) est égale à l'intégrale de la divergence de $\vec{A}$ sur le volume délimité par (S).

$$\iint_{(S)} \vec{A}.\vec{ds} = \iiint_{V(S)} div\ \vec{A}.d\tau$$

Considérons une distribution continue de charge définie par la densité volumique ρ et appliquons le théorème de Gauss. Il vient en utilisant le théorème de la divergence :

$$\iint_{(S)} \vec{E}.\vec{ds} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{V(S)} \rho\,.dv = \iiint_{V(S)} div\ \vec{E}.d\tau$$

▲L'égalité obtenue est valable quel que soit le volume $V(S)$, d'où l'équation fondamentale :

$$\boxed{div\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

c'est l'équation de Poisson, qui est une équation différentielle locale.

▲Puisque $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$, on a : $\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = -\overrightarrow{rot}\ (\overrightarrow{grad}) = 0$

Soit

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = 0}$$

c'est aussi une équation différentielle locale.

▲En remplaçant $\vec{E}$ par $-\overrightarrow{grad}V$ dans l'équation de Poisson on obtient :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

Dans une région où $\rho = 0$, on obtient l'équation suivante:

$$\Delta V = 0$$

C'est l'équation de Laplace.




ETUSUP.com